Résolution d'inéquations

1. Concepts de base :

Inégalité

On appelle inégalité l'expression de deux quantités dont l'une est soit plus grande, soit plus petite, soit plus grande ou égale, soit plus petite ou égale à l'autre. Les quatre symboles respectifs sont : $>$, $<$, $\geq$ et $\leq$.

ex: a) $35 > 15$ se lit " 35 est plus grand que 15 ";
b) $5 \leq 10$ se lit " 5 est plus petit ou égal à 10 ";
c) $(a^2 + b^2)^2 \geq a^4 + b^4$ se lit " $(a^2 + b^2)^2$ est plus grand ou égal à $a^4 + b^4$ ".

Inéquation

On appelle inéquation une inégalité qui est vérifiée seulement pour certaines valeurs particulières de la (des) variable(s) considérée(s).

ex: a) $x^2 > 9$ est une inéquation du 2^e degré à une variable;
b) $5x - 4 \leq 3x + 8$ est une inéquation du 1er degré à une variable;
c) $(a + b)^2 < (a + b)^3$ est une inéquation du 3^e degré à deux variables;
d) $2x + 4y \geq 8$ est une inéquation du 1er degré à deux variables.

Solution et ensemble-solution d'une inéquation

Les valeurs particulières de la variable qui vérifient l'inéquation (c'est-à-dire qui rendent l'inégalité vraie) sont appelées les <u>solutions de l'inéquation</u> et l'ensemble de toutes les solutions d'une inéquation est appelé <u>ensemble-solution de l'inéquation</u>.

ex: a) La valeur $x = 5$ est une solution de l'inéquation $5x - 4 \leq 3x + 8$ car l'inégalité $5(5) - 4 \leq 3(5) + 8$ (c'est-à-dire $21 \leq 23$) est une inégalité vraie.

b) Par contre la valeur $x = 10$ n'est pas une solution de l'inéquation $5x - 4 \leq 3x + 8$ car l'inégalité $5(10) - 4 \leq 3(10) + 8$ (c'est-à-dire $46 \leq 38$) est une inégalité fausse.

c) L'ensemble-solution de l'inéquation $5x - 4 \leq 3x + 8$ est donné par l'intervalle $]-\infty,6]$. Voyons comment on résout une inéquation comme celle-là.

2. Résolution d'une inéquation simple (inéquations du premier degré à une seule variable)

Si on veut résoudre une inéquation, on doit déterminer le(s) intervalle(s) qui indiquent les valeurs de la variable qui vérifient l'inéquation. Pour y arriver, il faut transformer l'inéquation initiale à résoudre au moyen des <u>inéquations équivalentes</u>.

Inéquations équivalentes

Deux inéquations sont dites équivalentes si et seulement si elles admettent le même ensemble-solution. Quelles sont les règles permettant d'obtenir une inéquation équivalente à une autre?

> Règle A:
> Si l'on ajoute (ou retranche) une même expression aux deux membres d'une inéquation, on obtient une inéquation équivalente **de même sens**.

ex: $5x - 4 \le 4x + 8$ est une inéquation équivalente à $(5x - 4) + 4 \le (4x + 8) + 4$, qui est équivalente à $5x \le 4x + 12$, qui est équivalente à $5x - 4x \le 4x + 12 - 4x$ c'est-à-dire $x \le 12$, qui est l'ensemble-solution de l'inéquation initiale. On peut aussi écrire $x \in \,]-\infty, 12]$.

> Règle B:
> i) Si l'on multiplie (ou divise) les deux membres d'une inéquation par une même expression positive, on obtient une inéquation équivalente **de même sens**.
> ii) Si l'on multiplie (ou divise) les deux membres d'une inéquation par une même expression négative, on obtient une inéquation équivalente **de sens contraire**.

ex: a) $8x < 16$ est une inéquation équivalente à $\left(\frac{1}{8}\right)(8x) < \left(\frac{1}{8}\right)(16)$, c'est-à-dire $x < 2$ qui est l'ensemble-solution de l'inéquation initiale. On peut aussi écrire $]-\infty, 2[$.

b) $-\frac{x}{4} > 16$ est une inéquation équivalente à $-4\left(-\frac{x}{4}\right) < -4(16)$, (N.B. le sens a été inversé) c'est-à-dire $x < -64$ qui est l'ensemble-solution de l'inéquation initiale.

c) On peut utiliser une combinaison de ces règles A et B pour résoudre l'exemple suivant:

$5(x - 3) + 8(2x - 5) \le 23(x + 1)$

$\Leftrightarrow 5x - 15 + 16x - 40 \le 23x + 23$

$\Leftrightarrow 21x - 55 \le 23x + 23$

$\Leftrightarrow 21x - 55 - 23x \le 23x + 23 - 23x$

$\Leftrightarrow -2x - 55 \le 23$

$\Leftrightarrow -2x - 55 + 55 \le 23 + 55$

$\Leftrightarrow -2x \le 78$

$\Leftrightarrow \frac{-2x}{-2} \ge \frac{78}{-2}$ (N.B. le sens a été inversé)

$\Leftrightarrow x \ge -39$

$\Leftrightarrow x \in [-39, +\infty[$ qui est l'ensemble-solution de l'inéquation initiale.

Cette façon de résoudre une inéquation en appliquant les deux règles de base permet de trouver l'ensemble-solution d'inéquations simples (telles les inéquations du premier degré à une seule variable).

3. Méthode de résolution générale

Mais comment procède-t-on si on veut résoudre des inéquations plus complexes (qui ne sont pas des inéquations du premier degré à une variable) ?

> 1° Dans de tels cas, il faut d'abord ramener l'inéquation à l'un des quatre cas suivants: $E > 0$, $E < 0$, $E \geq 0$, ou $E \leq 0$ (par les règles de base A et B énoncées plus haut). Il faut donc comparer une expression algébrique quelconque E à 0.
>
> 2° Ensuite il suffit de trouver le signe de E pour toutes les valeurs possibles de la variable (au besoin il faut factoriser l'expression E). Ceci se fait à l'aide d'un tableau de signes.
>
> 3° Enfin il faut utiliser l'information donnée dans ce tableau de signes pour trouver l'ensemble solution de l'inéquation initiale et conclure adéquatement.

Illustrons cette méthode en résolvant deux exemples.

Exemple a) Résoudre $x^2 - 8x \geq 20$

1° $x^2 - 8x \geq 20$ (à transformer de façon à obtenir $E \geq 0$)

$\Leftrightarrow$ $x^2 - 8x - 20 \geq 20 - 20$

$\Leftrightarrow$ $x^2 - 8x - 20 \geq 0$

$\Leftrightarrow$ $E \geq 0$ (si on pose $E = x^2 - 8x - 20$)

2° Pour pouvoir construire le tableau des signes, il faut d'abord trouver les zéros de tous les facteurs de l'expression E. Résolvons donc $E = x^2 - 8x - 20 = 0$

or $x^2 - 8x - 20 = 0 \Leftrightarrow (x + 2)(x - 10) = 0$

$\Leftrightarrow x + 2 = 0$ ou $x - 10 = 0$

$\Leftrightarrow x = -2$ ou $x = 10$

ou encore $x^2 - 8x - 20 = 0 \Leftrightarrow x = \dfrac{-(-8) \pm \sqrt{(-8)^2 - 4(1)(-20)}}{2(1)} \Leftrightarrow x = \dfrac{8 \pm \sqrt{144}}{2} = \dfrac{8 \pm 12}{2}$

$\Leftrightarrow x = -2$ ou $x = 10$

On peut maintenant construire un tableau permettant de trouver le signe de $x^2 - 8x - 20$ pour toutes les valeurs réelles de x plus petites que -2, plus grandes que 10, et entre ces deux valeurs.

x	$-\infty$	-2		10	$+\infty$
$x - 10$	-	-	-	0	$\boxed{+}$
$x + 2$	-	$\boxed{0}$	+	+	+
$E = x^2 - 8x - 20$ $= (x + 2)(x - 10)$	+	0	$\boxed{-}$	0	+

Ainsi l'information encadrée dans ce tableau à titre d'illustration doit être interprétée de la façon suivante:

- le signe de $(x - 10)$ est positif pour toute valeur de x supérieure à 10;
- le facteur $(x + 2)$ prend la valeur 0 si x est égal à -2;
- le signe de l'expression $(x^2 - 8x - 20)$ est négatif pour toutes les valeurs réelles de x qui se trouvent dans l'intervalle $]-2, 10[$.

N.B.: Dans le tableau ci-haut, les lignes indiquant les signes des facteurs $(x - 10)$ et $(x + 2)$, soit les 2[e] et 3[e] lignes du tableau, sont en fait optionnelles et ne servent qu'à faire apparaître les signes qu'on retrouve à la dernière ligne. Seules la première et la dernière ligne du tableau sont indispensables.

3° On reprend l'information donnée dans le tableau des signes indiqués pour l'expression E et on lit sur ce tableau de signes le(s) intervalle(s) qui vérifient l'inéquation, c'est-à-dire les valeurs de x qui rendent l'inégalité vraie. Ainsi dans cet exemple, on veut résoudre $E \geq 0$.
Voyons cela si on reprend le tableau:

x	$-\infty$	-2		10	$+\infty$
$E = x^2 - 8x - 20$ $= (x + 2)(x - 10)$	+	0	-	0	+
Valeur de vérité de $E \geq 0$	V	V	F	V	V

Ainsi l'information résumée du dernier tableau permet donc de conclure que $x^2 - 8x \geq 20$ si et seulement si $x \in]-\infty, -2] \cup [10, +\infty[$ ou encore $x \in \mathbb{R} \setminus]-2, 10[$.

Exemple b) Résoudre $\dfrac{10}{3x - 1} < 5$

1° $\dfrac{10}{3x - 1} < 5$ (à transformer de façon à obtenir $E < 0$)

$$\Leftrightarrow \frac{10}{3x - 1} - 5 < 5 - 5$$

$$\Leftrightarrow \frac{10}{3x - 1} - 5\,\frac{(3x - 1)}{(3x - 1)} < 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{10 - (15x - 5)}{3x - 1} < 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{10 - 15x + 5}{3x - 1} < 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{15 - 15x}{3x - 1} < 0$$

$$\Leftrightarrow E < 0 \qquad \left(\text{si on pose } E = \frac{15 - 15x}{3x - 1}\right)$$

On ne pouvait multiplier chaque membre de l'inégalité par $(3x - 1)$ car selon les valeurs que peut prendre x, le facteur $(3x - 1)$ peut être soit positif, soit négatif.

2° Afin de construire le tableau des signes de l'expression $E = \frac{15 - 15x}{3x - 1}$, il faut déterminer les zéros de chacun des facteurs de l'expression E. Ainsi

$$\begin{array}{llll} & 15 - 15x = 0 & \text{et} & 3x - 1 = 0 \\ \Leftrightarrow & 15 = 15x & \text{et} & 3x = 1 \\ \Leftrightarrow & x = 1 & \text{et} & x = \frac{1}{3} \end{array}$$

On construit un tableau permettant de trouver le signe de $\frac{15 - 15x}{3x - 1}$ pour toutes les valeurs réelles de x plus petites que 1/3, plus grandes que 1, et entre ces deux valeurs.

x	$-\infty$	$\frac{1}{3}$		1	$+\infty$
$15 - 15x$	+	+	+	0	-
$3x - 1$	-	0	+	+	+
$E = \frac{15 - 15x}{3x - 1}$	-	n.d.	+	0	-

3° On reprend l'information donnée dans le tableau des signes indiqués pour l'expression E et on lit sur ce tableau de signes le(s) intervalle(s) qui vérifient l'inéquation, c'est-à-dire les valeurs de x qui rendent l'inégalité <u>vraie</u>. Ainsi dans cet exemple, on veut résoudre E < 0.
Voyons cela si on reprend le tableau:

x	$-\infty$	$\frac{1}{3}$		1	$+\infty$
$E = \frac{15 - 15x}{3x - 1}$	-	n.d.	+	0	-
Valeur de vérité de $E < 0$	V	F	F	F	V

Ainsi l'information résumée du dernier tableau permet donc de conclure que $\frac{10}{3x - 1} < 5$

si et seulement si $x \in]-\infty, \frac{1}{3}[\cup]1, +\infty[$ ou encore $x \in \mathbb{R} \setminus [\frac{1}{3}, 1]$

<u>Illustrons avec un dernier exemple</u>: Résoudre $\frac{(x + 1)}{(x - 4)(x - 2)} \leq 2$

1° $\frac{(x + 1)}{(x - 4)(x - 2)} \leq 2$ (à transformer de façon à obtenir $E \leq 0$)

$$\Leftrightarrow \quad \frac{(x + 1)}{(x - 4)(x - 2)} - 2 \leq 2 - 2$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{(x + 1)}{(x - 4)\,(x - 2)} - \frac{2(x - 4)(x - 2)}{(x - 4)(x - 2)} \leq 0$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{(x + 1) - 2\,(x^2 - 6x + 8)}{(x - 4)(x - 2)} \leq 0$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{(x + 1) - (2x^2 - 12x + 16)}{(x - 4)(x - 2)} \leq 0$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{-2x^2 + 13x - 15}{(x - 4)(x - 2)} \leq 0$$

$$\Leftrightarrow \quad E \leq 0 \qquad \left(\text{si on pose } E = \frac{-2x^2 + 13x - 15}{(x - 4)(x - 2)}\right)$$

2° i) On trouve que $-2x^2 + 13x - 15 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{3}{2}$ ou $x = 5$.

(En utilisant la formule quadratique ou la factorisation)

ii) On trouve que $x - 4 = 0 \Leftrightarrow x = 4$.

iii) On trouve que $x - 2 = 0 \Leftrightarrow x = 2$.

Construction du tableau des signes de l'expression E.

x	$-\infty$	$\frac{3}{2}$		2		4		5	$+\infty$
$E = \frac{-2x^2+13x-15}{(x-4)(x-2)}$	-	0	+	n.d.	-	n.d.	+	0	-

3° Lecture du tableau et conclusion

x	$-\infty$	$\frac{3}{2}$		2		4		5	$+\infty$
$E = \frac{-2x^2+13x-15}{(x-4)(x-2)}$	-	0	+	n.d.	-	n.d.	+	0	-
Valeur de vérité de $E \leq 0$	V	V	F	F	V	F	F	V	V

On peut donc conclure que

$$\frac{(x + 1)}{(x - 4)(x - 2)} \leq 2 \quad \Leftrightarrow \quad x \in \left]-\infty, \frac{3}{2}\right] \cup \left]2, 4\right[\cup \left[5, +\infty\right[.$$