La factorisation

La factorisation consiste à transformer une somme de termes en un produit de facteurs.
Voici les méthodes de factorisation fréquemment utilisées.

- **La mise en évidence simple** :
  Pas trop compliqué et c'est le premier réflexe à avoir !
  Tous les termes contiennent un facteur commun, qui peut être mis en évidence en utilisant la propriété de la distributivité de la multiplication sur l'addition.

  ex : a) $12x^3 - 6x^2 + hx = x(12x^2 - 6x + h)$
  b) $2x^4y + 14x^3y^2 - 20x^2y = 2x^2y(x^2 + 7xy - 10)$

- **La mise en évidence double** :
  Lorsqu'il y a au moins 4 termes, nous regroupons les termes deux à deux (ou trois à trois…), chaque paire (ou triplet…) contenant un facteur commun. Après avoir regroupé les termes, on effectue, si possible, deux mises en évidence successives.

  ex : a) $$\begin{aligned} 6x^2 + 12xy + xy^2 + 2y^3 &= [6x^2 + 12xy] + [xy^2 + 2y^3] \\ &= 6x(x + 2y) + y^2(x + 2y) \\ &= (x + 2y)(6x + y^2) \end{aligned}$$
  b) $$\begin{aligned} 1 - x + x^2 - x^3 &= [1 - x] + [x^2 - x^3] \\ &= 1(1 - x) + x^2(1 - x) \\ &= (1 - x)(1 + x^2) \end{aligned}$$

- **Différence de carrés** :
  Un binôme de la forme $a^2 - b^2$ se décompose de la façon suivante : $a^2 - b^2 = (a + b)(a - b)$

  ex : a) $4 - x^2 = (2)^2 - (x)^2 = (2 + x)(2 - x)$
  b) $x^2 - 8 = (x)^2 - (\sqrt{8})^2 = (x + \sqrt{8})(x - \sqrt{8})$

- **Somme de carrés** :
  Un binôme de la forme $a^2 + b^2$ ne se factorise pas en produit de facteurs du 1er degré.

  ex : a) $x^2 + 4$
  b) $4x^2 + 7$

- **Différence de cubes** :
  Un binôme de la forme $a^3 - b^3$ se décompose de la façon suivante : $a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2)^*$

  ex : $x^3 - 8 = (x)^3 - (2)^3 = (x - 2)(x^2 + 2x + 4)$

- **Somme de cubes** : Un binôme de la forme $a^3 + b^3$ se décompose de la façon suivante :
  $a^3 + b^3 = (a + b)(a^2 - ab + b^2)^*$

  ex : $27x^3 + 1 = (3x)^3 + (1)^3 = (3x + 1)(9x^2 - 3x + 1)$

* On peut obtenir le second facteur par division de polynômes.

× **Trinôme de la forme $ax^2 + bx + c$** :

Calculer d'abord le discriminant $\Delta = b^2 - 4ac$.

Si $\Delta < 0$, alors le trinôme $ax^2 + bx + c$ ne se factorise pas.
Si $\Delta \geq 0$, alors le trinôme $ax^2 + bx + c$ se factorise.

1^er^ cas : Si Δ est le carré d'un entier et que a, b et $c \in \mathbb{Z}$.

Truc rapide avec $a = 1$:
On cherche deux nombres, disons m et n, tels que $m + n = b$ et $m \times n = c$.
Si on trouve rapidement ces nombres alors $x^2 + bx + c = (x + m)(x + n)$.

ex : a) $x^2 + 8x + 7 = (x + 7)(x + 1)$ car $7 \times 1 = 7$ et $7 + 1 = 8$
b) $x^2 + x - 12 = (x - 3)(x + 4)$ car $(-3) \times 4 = -12$ et $(-3) + 4 = 1$

Truc rapide avec $a \neq 1$:
On cherche deux nombres, disons m et n, tels que $m + n = b$ et $m \times n = a \times c$. On remplace b par la somme de ces deux nombres $(m + n)$ et on effectue une mise en évidence double.

ex : a) $4x^2 - 12x ++ 5$ On cherche m et n tels que $m + n = -12$ et $m \times n = 20$.
On trouve $m = -10$ et $n = -2$.
Ainsi, $4x^2 - 12x + 5 = 4x^2 - 10x - 2x + 5$
$= 2x(2x - 5) - 1(2x - 5)$
$= (2x - 5)(2x - 1)$
b) $3x^2 - 5x - 12 = 3x^2 - 9x + 4x - 12 = 3x(x - 3) + 4(x - 3) = (x - 3)(3x + 4)$

2^e^ cas : Si Δ n'est pas le carré d'un rationnel.

Méthode infaillible :
On utilise la formule quadratique : $x_1 = \dfrac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$ et $x_2 = \dfrac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$
si $b^2 - 4ac > 0$ alors x_1 et x_2 sont distincts et $ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$
si $b^2 - 4ac = 0$ alors x_1 et x_2 sont égaux et $ax^2 + bx + c = a(x - x_1)^2$
ex : a) $4x^2 - 12x + 5 = 4(x - \frac{5}{2})(x - \frac{1}{2})$ car avec la formule quadratique $x_1 = \frac{5}{2}$ et $x_2 = \frac{1}{2}$
$= (2x - 5)(2x - 1)$
b) $x^2 + \sqrt{8}\,x + 2 = (x + \sqrt{2})^2$

Un document présentant des exercices de factorisation est disponible.