THÉORIE DES ENSEMBLES

Définitions

Un ensemble est une collection, un regroupement d'objets, de nombres, d'identités concrètes ou abstraites. En général les ensembles sont désignés par des lettres majuscules A, B, W, etc.

Les objets particuliers qui appartiennent à un ensemble sont appelés les éléments de cet ensemble et la notation pour indiquer qu'un élément b fait partie d'un certain ensemble B, ou que b appartient à B, est $b \in B$. Dans le cas contraire, si l'élément b n'appartient pas à l'ensemble B, on note $b \notin B$.

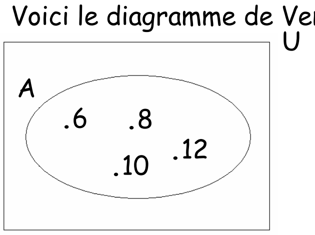
Ex.: Soit V l'ensemble des voyelles de l'alphabet français;
alors on $a, e \in V$ et $p \notin V$.

On dit qu'un ensemble est décrit en extension quand on énumère entre accolades les éléments de cet ensemble, en séparant ces éléments les uns des autres par une virgule.. Le même ensemble peut aussi être décrit en compréhension à l'aide d'une propriété qui soit commune à tous les éléments de l'ensemble et qui ne le soit qu'à eux seuls. On peut représenter graphiquement les ensembles et les opérations sur les ensembles par des diagrammes de Venn. L'ensemble universel (ensemble de tous les éléments dont il est question dans un contexte donné, noté U) est représenté par un grand rectangle, un ensemble par un cercle et un élément par un point.

Voyons les notations utilisées à l'aide d'un exemple.

Ex.: Considérons l'ensemble des nombres pairs supérieurs à 5 et inférieurs à 13.

a) $A = \{6, 8, 10, 12\}$ est la notation utilisée pour décrire cet ensemble en extension.
b) $A = \{x \mid x$ est un nombre pair supérieur à 5 et inférieur à 13$\}$ est la notation utilisée pour décrire cet ensemble en compréhension.
c) Voici le diagramme de Venn correspondant à l'ensemble A :



On appelle <u>cardinal</u> d'un ensemble E le nombre d'éléments qu'il y a dans cet ensemble. La notation usuelle pour le cardinal d'un ensemble E est n(E), Card(E) ou #(E).

Ex.: Soit V l'ensemble des voyelles de l'alphabet français:

On a alors V = {a, e , i, o, u, y} et le cardinal de cet ensemble est n(V) = 6.

On dit qu'un ensemble est <u>fini</u> s'il possède un nombre fini d'éléments, c'est-à-dire que son cardinal est un nombre naturel 0, 1, 2, 3, 4, etc. Un ensemble qui ne contient aucun élément est appelé <u>ensemble-vide</u>. On note cet ensemble { } ou $\varnothing$ (lire « phi »). On peut aussi parler des <u>singletons</u> qui désignent tous les ensembles qui ne comportent qu'un seul élément.

Ex : A = {0}, B = {z} ou C = {René}.

Un ensemble est <u>infini</u> s'il possède un nombre infini d'éléments. Parmi les ensembles de nombres infinis les plus usuels, on note $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$, $\mathbb{I}$, $\mathbb{C}$. Un document portant sur ces ensembles de nombres est disponible au Centre d'aide en mathématiques.

Il existe des notions d'intervalle fermé, ouvert, semi-ouvert pour décrire certains sous-ensembles de $\mathbb{R}$:

$[a, b] = \{x \mid x \in \mathbb{R} \text{ et } a \leq x \leq b\}$

$]a, b] = \{x \mid x \in \mathbb{R} \text{ et } a < x \leq b\}$

$[1, 8[= \{x \mid x \in \mathbb{R} \text{ et } 1 \leq x < 8\}$

$]-3, 5[= \{x \mid x \in \mathbb{R} \text{ et } -3 < x < 5\}$

$[-3, +\infty$ ou $[-3, +\infty[= \{x \mid x \in \mathbb{R} \text{ et } x \geq -3\}$

<u>Relations entre deux ensembles</u>

A est un <u>sous-ensemble</u> de B si et seulement si tous les éléments qui appartiennent à l'ensemble A appartiennent aussi à l'ensemble B. On dira que, si A est un sous-ensemble de B, A est "<u>inclus</u>" dans B ou A est "<u>compris</u>" dans B et ceci est noté $A \subseteq B$. Dans le cas contraire on dira que A n'est pas un sous-ensemble de B et on notera $A \not\subseteq B$.

Ainsi pour les ensembles de nombres, on peut écrire par exemple:

a) $\mathbb{N}^* \subseteq \mathbb{N} \subseteq \mathbb{Z} \subseteq \mathbb{Q} \subseteq \mathbb{R}$

b) $\mathbb{I} \subseteq \mathbb{R}$

c) $\mathbb{Q} \not\subseteq \mathbb{I}$

d) $[2, 5] \subseteq [1, 6]$

e) $[2, 5] \not\subseteq [1, 5[$ car $5 \in [2, 5]$ mais $5 \notin [1, 5[$

f) $\{\sqrt{2}, \sqrt[3]{5}, \pi, e\} \subseteq \mathbb{I}$.

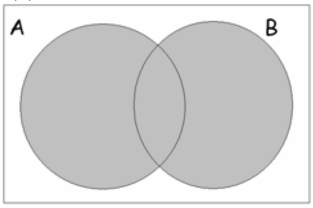
On dit que l'ensemble A est <u>égal</u> à l'ensemble B si et seulement si tous les éléments de A appartiennent à B, et tous les éléments de B appartiennent à A, ou encore si et seulement si A est un sous-ensemble de B et B est un sous-ensemble de A. On note le tout ainsi:

$$A = B \Leftrightarrow A \subseteq B \text{ et } B \subseteq A.$$

<u>Opérations sur les ensembles</u>

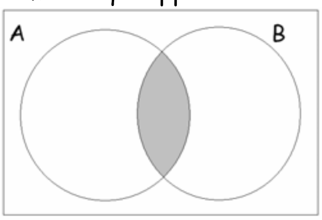
- L'<u>union</u> de deux ensembles A et B est une opération qui fait correspondre à ces deux ensembles un troisième ensemble, noté $A \cup B$ (lire "A union B") qui contient tous les éléments qui appartiennent à A ou à B ou aux deux ensembles à la fois.

$$A \cup B = \{x \mid x \in A \ \textbf{ou} \ x \in B\}.$$



Ex.: Soit $A = \{2, 3, 4, 5\}$ $B = \{1, 3, 6, 8\}$ et $C = \{2, 5, 10\}$ alors
$A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 8\}$ et $A \cup C = \{2, 3, 4, 5, 10\}$

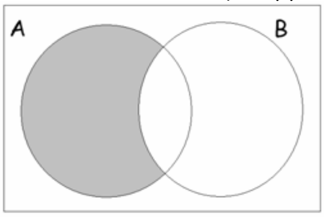
- L'<u>intersection</u> de deux ensembles A et B est une opération qui fait correspondre à ces deux ensembles un troisième ensemble, noté $A \cap B$ (lire "A intersection B") qui contient tous les éléments qui appartiennent à A et à B simultanément.



$$A \cap B = \{x \mid x \in A \ \textbf{et} \ x \in B\}.$$

Ex.: Soit $A = \{2, 3, 4, 5\}$ $B = \{1, 3, 6, 8\}$ et $C = \{2, 5, 10\}$ alors $A \cap B = \{3\}$ et $B \cap C = \{\,\} = \varnothing$

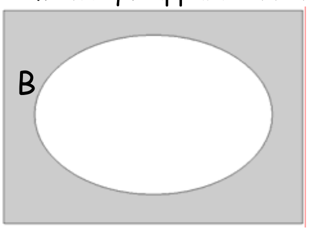
- La <u>différence</u> entre deux ensembles A et B, est une opération qui fait correspondre à ces deux ensembles un troisième ensemble, noté A \ B (lire « A moins B » ou « A sauf B ») qui contient tous les éléments qui appartiennent à A et qui n'appartiennent pas à B.



$A \setminus B = \{x \mid x \in A \text{ et } x \notin B\}$

Ex.: Soit A = {2, 3, 4, 5} B= {1, 3, 6, 8} et C = {2, 5, 10} alors
A \ B = {2, 4, 5} et B \ C = {1, 3, 6, 8} = B

- On définit le <u>complément</u> d'un ensemble B noté B' ou $\overline{B}$ (lire B complément), par rapport à un ensemble de référence (aussi appelé l'ensemble universel, souvent noté U), l'ensemble de tous les éléments qui appartiennent à l'ensemble U mais qui n'appartiennent pas à l'ensemble B.



Ainsi $B' = \overline{B} = U \setminus B$.

Ex.: Soit U = {0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10} et B = {3, 4, 6, 7, 8} alors $B' = \overline{B} =$ {0, 1, 2, 5, 9, 10}
Ex.: $A \setminus B = \{x \mid x \in A \cap B'\}$

- Le <u>produit cartésien</u> entre deux ensembles A et B est une opération qui fait correspondre à ces deux ensembles un troisième ensemble, noté A x B (lire "A croix B") et est défini de la façon suivante: $A \times B = \{(x, y) \mid x \in A \text{ et } y \in B\}$.

Ex.: Soit A = {2, 3} B = {1, 3, 6} alors
A x B = {(2, 1), (2, 3), (2, 6), (3, 1), (3, 3), (3, 6)}