La fonction rationnelle

Éléments de base à connaître

- ☐ Qu'est-ce qu'un polynôme ?
- ☐ Qu'est-ce qu'une fonction rationnelle ?
- ☐ Comment identifier des asymptotes verticales d'une fonction rationelle ?
- ☐ Comment déterminer les zéros d'une fonction rationnelle ?
- ☐ Comment déterminer les abscisses des points d'une fonction rationelle dont l'ordonnée est donnée.
- ☐ Comment déterminer l'ensemble de définition d'une fraction rationnelle
  (comment déterminer le domaine d'une fonction rationnelle) ?

Exemple

La règle de correspondance d'une fonction réelle est $f(x) = \dfrac{x^2 - 5\,x + 6}{x^2 - 6\,x + 8}$

a) Déterminer le domaine de cette fonction.

b) Simplifier cette fonction sur son domaine.

c) Déterminer les équations des asymptotes verticales.

d) Déterminer les points dont l'ordonnée est 3.

Solution détaillée à la page suivante

Ressources du web

1. **Club Pythagore** (ressource sous la forme écrite) CLIQUEZ ICI
   Vocabulaire. Un exemple pour la détermination du domaine d'une fonction rationnelle.

2. **Alloprof** (ressources sous la forme écrite)
   i) Solution détaillée à un problème comportant une mise en situation, dont la résolution nécessite le traitement d'une fonction rationnelle. CLIQUEZ ICI
   ii) Résolution d'une équation rationnelle. CLIQUEZ ICI
   Note : Se limiter à la première définition et aux 3 premiers exemples.

3. **Alloprof** (ressource sous la forme d'une vidéo) CLIQUEZ ICI
   Solution détaillée à un problème comportant une mise en situation (différente de celle indiquée plus haut sous la forme écrite), dont la résolution nécessite le traitement d'une fonction rationnelle.
   Remarque : Dans cette vidéo, on laisse sous-entendre qu'une fonction rationnelle est le quotient de deux polynômes du premier degré alors qu'en général, une fonction rationnelle est un quotient de deux polynômes, sans restriction sur les degrés.

Résolution de l'exemple

La règle de correspondance d'une fonction réelle est

$$f(x) = \frac{x^2 - 5\,x + 6}{x^2 - 6\,x + 8}$$

a) Déterminer le domaine de cette fonction.

Cette fonction est définie pour toutes les valeurs de x, sauf celles où le dénominateur s'annule. Pour déterminer les valeurs qui annulent le dénominateur, on peut utiliser la formule quadratique car le dénominateur est un polynôme de degré 2, ou bien le factoriser (c'est ce que nous ferons ici).

$$f(x) = \frac{x^2 - 5\,x + 6}{x^2 - 6\,x + 8} = \frac{x^2 - 5\,x + 6}{(x-2)(x-4)}$$

Ainsi on pourra toujours calculer $f(x)$ sauf lorsque $x = 2$ ou $x = 4$. Ainsi, le domaine de $f(x)$ est $\mathbb{R}\backslash\{2, 4\}$.

b) Simplifier cette fonction sur son domaine.

$$f(x) = \frac{x^2 - 5\,x + 6}{x^2 - 6\,x + 8} = \frac{(x-2)(x-3)}{(x-2)(x-4)} = \frac{x-3}{x-4} \qquad \text{(lorsque } x \neq 2\text{)}$$

Ainsi, pour $x \neq 2$, la fonction $f(x)$ coïncide avec la fonction $g(x) = \dfrac{x-3}{x-4}$.

c) Déterminer les équations des asymptotes verticales.

Dans le cas des fonctions rationnelles, on a une asymptote verticale pour chaque valeur qui annule le dénominateur de la fonction simplifiée. Ainsi, dans le cas de la fonction $f(x)$, on a une asymptote verticale lorsque $x = 4$. L'équation de l'unique asymptote verticale est donc $x = 4$.

d) Déterminer les points dont l'ordonnée est 3.

On a déjà l'ordonnée, il reste à trouver les abscisses. Pour cela, il suffit d'imposer l'égalité $f(x) = 3$, ce qui revient à imposer $g(x) = 3$ (on peut travailler directement avec la fonction simplifiée).

$$\begin{aligned}
g(x) &= 3 \\
\frac{x-3}{x-4} &= 3 \\
x - 3 &= 3\,(x-4) \\
x - 3 &= 3\,x - 12 \\
x - 3\,x &= -12 + 3 \\
-2\,x &= -9 \\
x &= \frac{9}{2}
\end{aligned}$$

Il n'y a qu'un seul point dont l'ordonnée est 3 et c'est le point $(\frac{9}{2}, 3)$.

Remarque : Comme complément, voici la représentation graphique des fonctions $f(x)$ et $g(x)$ sur une partie de leur domaine.

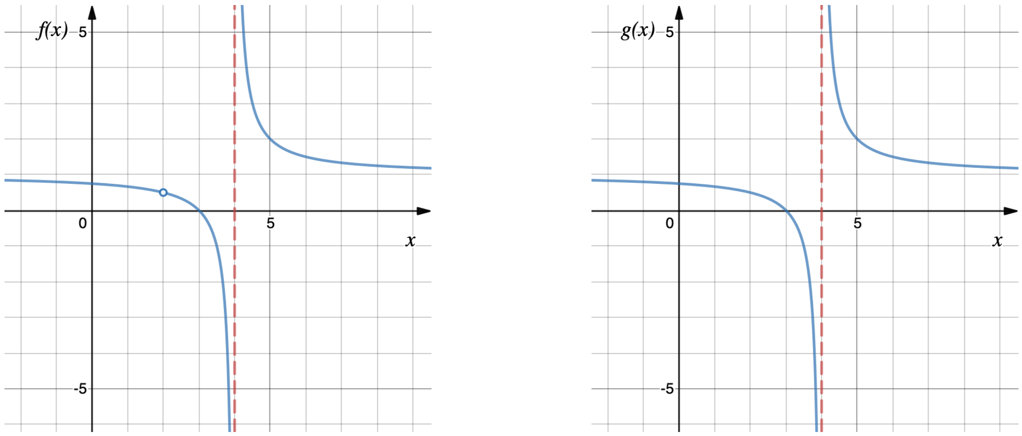

Figure 1 – Observez la subtile différence entre les graphiques de $f(x)$ et $g(x)$.

Exercice

Répondre aux sous-questions de l'exemple de la première page, mais avec la fonction $f(x) = \dfrac{x^2+x-12}{x^2+2\,x-15}$

Réponses

a) Le domaine de $f(x)$ est $\mathbb{R} \setminus \{3, -5\}$.

b) Pour $x \neq 3$, la fonction $f(x)$ coïncide avec la fonction $g(x) = \dfrac{x+4}{x+5}$.

c) Il y a une seule asymptote verticale et son équation est $x = -5$.

d) Le point dont l'ordonnée est 3 est le point $(-\frac{11}{2}, 3)$.

Mise en garde : Des professeurs peuvent avoir des façons de faire différentes de celles que l'on peut voir dans les liens donnés en référence à la rubrique *Ressources du web*, ou bien dans la solution proposée à l'exemple. Soyez attentifs aux directives qu'ils pourraient vous donner concernant la présentation des solutions et le détail des calculs.