La factorisation de polynômes

Éléments de base à connnaître

☐ Qu'est-ce qu'un polynôme ?

☐ Comment factoriser un polynôme à l'aide de différentes techniques (mise en évidence simple, mise en évidence double, trinôme carré parfait, produit-somme, différence de carrés, complétion du carré et formule quadratique) ?

☐ Comment utiliser la factorisation pour trouver les zéros d'un polynôme ?

Exemple

Répondre aux questions suivantes pour chacun des polynômes.

a) Factoriser complètement les polynômes, si possible.

b) Déterminer les zéros des polynômes, s'ils existent.

   i) $15x^5 - 25x^4 - 10x^3$

   ii) $5x^2 + 2x + 3$

Solution détaillée à la page suivante

Ressources du web

1. **Alloprof** (ressources sous la forme écrite) Cliquez ici
   Notions de base sur les polynômes pour se préparer à factoriser.

2. **Alloprof** (ressources sous la forme écrite) Cliquez ici
   Résumé rapide de la factorisation pour faciliter le choix de la technique à employer.

3. **Mathéma-TIC** (ressources sous la forme écrite et sous la forme de vidéos) Cliquez ici
   Présentation détaillée sur chaque technique de factorisation à maîtriser avec des exemples résolus.

Résolution de l'exemple

a) Factoriser complètement les polynômes, si possible.

i) $15x^5 - 25x^4 - 10x^3$

Pour factoriser un polynôme, il faut tout d'abord vérifier s'il y a une mise en évidence simple possible. Ici, le facteur $5x^3$ est commun à tous les termes. La première étape de factorisation sera donc de mettre en évidence $5x^3$.

$$5x^3\left(3x^2 - 5x - 2\right)$$

Les termes dans la parenthèse forment un trinôme de la forme $ax^2 + b + c$ et peuvent être factorisés davantage à l'aide de la formule quadratique ou de la technique somme-produit. Nous utiliserons ici la technique somme-produit. Pour se faire, il faut d'abord chercher deux nombres u et v tels que leur produit est -6 et leur somme est -5. Les deux seuls nombres qui respectent ces conditions sont -6 et 1. Le terme central $-5x$ peut donc être remplacé par $-6x + x$.

$$5x^3\left(3x^2 - 6x + x - 2\right)$$

Il suffit maintenant de faire une mise en évidence double des termes de la parenthèse.

$$5x^3\left[3x\left(x-2\right) + 1\left(x-2\right)\right]$$

$$5x^3\left[\left(3x+1\right)\left(x-2\right)\right]$$

La factorisation est complète car il ne reste aucun facteur qui peut être factorisé davantage. L'expression complètement factorisée est donc :

$$5x^3\left(3x+1\right)\left(x-2\right)$$

ii) $5x^2 + 2x + 3$

Comme à la question précédente, il faut d'abord vérifier s'il y a une mise en évidence simple possible, c'est-à-dire s'il y a des facteurs en commun à tous les termes. Ce n'est pas le cas ici.
Étant donné que le polynôme est un trinôme de la forme $ax^2 + bx + c$, nous pouvons essayer la technique de somme-produit ou la formule quadratique pour le factoriser. Nous utiliserons ici la formule quadratique. Pour factoriser avec la formule quadratique, il faut d'abord calculer le discriminant $b^2 - 4ac$ pour vérifier si le polynôme est factorisable. Si le discriminant est positif ou nul, il est possible de factoriser le polynôme. Si le discriminant est négatif, ce n'est pas possible.

$$b^2 - 4ac = 2^2 - 4\left(5\right)\left(3\right) = 4 - 60 = -56 < 0$$

Étant donné que le discriminant est négatif, le polymôme n'est pas factorisable.

b) Déterminer les zéros des polynômes, s'ils existent.

i) $15x^5 - 25x^4 - 10x^3$

Les zéros du polynôme sont toutes les valeurs de x telles que le polynôme s'annule. Pour les trouver, il faut donc résoudre l'équation suivante :

$$15x^5 - 25x^4 - 10x^3 = 0$$

Pour cela, il faut utiliser la forme factorisée trouvée en a) car, pour qu'un produit donne 0, il faut que l'un des facteurs s'annule. Ce n'est pas vrai pour les termes d'une somme. On cherche donc l'ensemble des valeurs de x telles que

$$5x^3\left(3x+1\right)\left(x-2\right) = 0$$

Pour que cette équation soit vraie, il faut que l'un des facteurs soit égal à 0. L'équation précédente est donc équivalente à :

$$5x^3 = 0 \qquad \text{et} \qquad 3x+1=0 \qquad \text{et} \qquad x-2=0$$

En isolant x dans chacune des équations, on obtient les trois zéros du polynôme :

$$x = 0 \qquad \text{et} \qquad x = -\frac{1}{3} \qquad \text{et} \qquad x = 2$$

ii) $5x^2 + 2x + 3$

Ce polynôme est n'est pas factorisable. Il n'a donc pas de zéros.

Exercice

Répondre aux sous-questions de l'exemple de la première page, mais avec les polynômes suivants :

i) $9x^2 - 24x + 16$

ii) $4\left(2x+1\right)^2 + 5x\left(2x+1\right)$

iii) $144 - 9x^2$

Réponses

a) i) $\left(3x-4\right)^2$

ii) $\left(2x+1\right)\left(13x+4\right)$

iii) $9\left(4-x\right)\left(4+x\right)$

b) i) $x = \frac{4}{3}$

ii) $x = -\frac{1}{2}$ et $x = -\frac{4}{13}$

iii) $x = 4$ et $x = -4$

Mise en garde : Des professeurs peuvent avoir des exigences différentes de ce que l'on peut voir dans les vidéos. Soyez attentifs aux directives qu'ils pourraient vous donner concernant la présentation des solutions et le détail des calculs.