Les propriétés des fonctions

Éléments de base à connaître

- ☐ Qu'est-ce qu'une fonction ?
- ☐ Comment déterminer le domaine, l'image, les zéros, l'ordonnée à l'origine, les intervalles de croissance, le signe et les extremums d'une fonction à partir de sa représentation graphique ?
- ☐ Comment déterminer le domaine, les zéros et l'ordonnée à l'origine d'une fonction à partir de sa règle de correspondance ?

Exemple

La règle de correspondance d'une fonction réelle est $f(x) = \dfrac{\sqrt{2-x}}{2x^2 - 11x + 12}$.

a) Déterminer le domaine de cette fonction.

b) Déterminer les zéros de cette fonction, s'ils existent.

c) Déterminer l'ordonnée à l'origine de cette fonction, si elle existe.

Solution détaillée à la page suivante

Ressources du web

1. **Mathéma-TIC** (ressources sous la forme d'un vidéo) Cliquez ici
   Présentation du concept de fonction et de certaines définitions en lien avec les fonctions.

2. **Alloprof** (ressource sous la forme écrite) Cliquez ici
   Présentation rapide des différentes caractéristiques des fonctions en utilisant leur représentation graphique.

3. **Khan Academy** (ressources sous la forme de vidéos)
   i) Exemples de recherche graphique du domaine et de l'image d'une fonction. Cliquez ici
   ii) Présentation détaillée sur la recherche graphique des intervalles de croissance et du signe d'une fonction. Cliquez ici

4. **Mathéma-TIC** (ressources sous la forme d'un vidéo) Cliquez ici
   Présentation détaillée sur la recherche du domaine d'une fonction à partir de sa règle de correspondance.

5. **Mathéma-TIC** (ressources sous la forme écrite) Cliquez ici
   Présentation rapide sur la recherche des zéros et de l'ordonnée à l'origine d'une fonction à partir de sa règle de correspondance. Plus de détails sur ce sujet dans les autres documents de la trousse.

Résolution de l'exemple

La règle de correspondance d'une fonction réelle est

$$f(x) = \frac{\sqrt{2-x}}{2x^2 - 11x + 12}$$

a) Déterminer le domaine de cette fonction.

Pour déterminer le domaine d'une fonction algébrique, il y a deux éléments auquel il faut porter une attention particulière : les dénominateurs (qui doivent être non-nuls) et les racines paires (dont l'argument doit être supérieur ou égal à 0).

i) *Dénominateur :* Il faut déterminer toutes les valeurs de x telles que le dénominateur s'annule pour les retirer du domaine. Ceci revient à résoudre l'équation suivante :

$$2x^2 - 11x + 12 = 0$$

Pour résoudre cette équation, il faut utiliser la formule quadratique ou la factorisation. Nous utiliserons la factorisation ici. La forme factorisée de l'équation précédente est :

$$(2x-3)(x-4) = 0$$

Pour qu'un produit donne 0, il faut que l'un de ses facteurs s'annule. L'équation précédente est donc équivalente à :

$$2x - 3 = 0 \qquad \text{et} \qquad x - 4 = 0$$

En isolant x dans les deux équations, on obtient les deux valeurs de x qui doivent être exclues du domaine en raison de la présence du dénominateur.

$$x = \frac{3}{2} \qquad \text{et} \qquad x = 4$$

ii) *Racine carrée :* Il faut trouver la condition à imposer à x pour que l'argument de la racine, c'est-à-dire ce qui se trouve sous la racine, soit supérieur ou égal à 0.

$$2 - x \geq 0$$

En isolant x dans cette inéquation, on obtient la condition recherchée :

$$-x \geq -2$$

$$x \leq 2$$

En rassemblant ces conditions, on obtient que x doit être inférieur ou égal à 2 et qu'il ne peut pas être égal à $\frac{3}{2}$ ou à 4. Or, la condition $x \neq 4$ est déjà respectée si $x \leq 2$. Il ne faut donc pas l'ajouter. Le domaine de la fonction est donc :

$$\mathrm{Dom} f = \left] -\infty, 2 \right] \Big\backslash \left\{ \frac{3}{2} \right\}$$

ou de façon équivalente :

$$\mathrm{Dom} f = \left] -\infty, \frac{3}{2} \right[\bigcup \left] \frac{3}{2}; 2 \right]$$

b) Déterminer les zéros de cette fonction, s'ils existent.

Les zéros d'une fonction sont toutes les valeurs de x dans le domaine telles que $f(x) = 0$. Déterminer les zéros de la fonction f est donc équivalent à résoudre l'équation suivante :

$$\frac{\sqrt{2-x}}{2x^2 - 11x + 12} = 0$$

Or, si x est dans le domaine, pour qu'une fraction rationnelle s'annule, il faut que son numérateur s'annule. Autrement dit, pour résoudre l'équation précédente, il suffit de résoudre :

$$\sqrt{2-x} = 0$$

Pour isoler x, il faut d'abord élever chaque côté au carré. On obtient alors :

$$2 - x = 0$$

$$x = 2$$

Le seul zéro de la fonction est donc $x = 2$, s'il est dans le domaine de la fonction. Le domaine a été trouvé en a) et $x = 2$ en fait bel et bien partie. La fonction a donc un seul zéro, $x = 2$.

c) Déterminer l'ordonnée à l'origine de cette fonction, si elle existe.

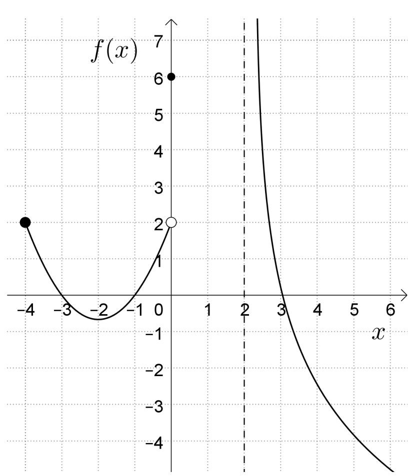
L'ordonnée à l'origine est la valeur de la fonction lorsque $x = 0$. Pour déterminer cette valeur, il suffit donc d'évaluer $f(0)$, si 0 est dans le domaine de la fonction.

$$f(0) = \frac{\sqrt{2-0}}{2(0)^2 - 11(0) + 12} = \frac{\sqrt{2}}{12}$$

L'ordonnée à l'origine de la fonction est donc $y = \frac{\sqrt{2}}{12}$.

Exercices

1. Répondre aux questions sur la fonction f illustrée ci-dessous.



a) Quel est le domaine de la fonction ?

b) Quelle est l'image de la fonction ?

c) Quels sont les zéros de la fonction ?

d) Quelle est l'ordonnée à l'origine de la fonction ?

e) Pour quelles valeurs de x la fonction est-elle positive ?

f) Pour quelles valeurs de x la fonction est-elle décroissante ?

g) La fonction a-t-elle un maximum absolu ?

h) La fonction a-t-elle une asymptote ?

2. Répondre aux sous-questions de l'exemple de la première page, mais avec la fonction suivante :

$$g\left(x\right)=\frac{9x^2-25}{\left(3x^2-2x-1\right)\sqrt{x+9}}$$

Réponses

1. a) Le domaine de f est $[-4{,}0]\cup]2,+\infty[$.
   b) L'image de f est $\mathbb{R}$.
   c) Les zéros de f sont $x=-3$, $x=-1$ et $x=3$.
   d) L'ordonnée à l'origine de f est $y=6$.
   e) La fonction est positive si $x\in[-4,-3[\cup]-1{,}0]\cup]2{,}3[$.
   f) La fonction est décroissante si $x\in[-4,-2]\cup]2,+\infty[$.
   g) Non, il n'y a pas de maximum absolu car l'image de la fonction est $\mathbb{R}$.
   h) Oui, la fonction a une asymptote verticale. L'équation de cette asymptote est $x=2$.

2. a) Le domaine de la fonction est $]-9;+\infty[\setminus\left\{-\frac{1}{3};1\right\}$.
   b) Les zéros de la fonctions sont $x=-\frac{5}{3}$ et $x=\frac{5}{3}$.
   c) L'ordonnée à l'origine de la fonction est $y=\frac{25}{3}$.

Mise en garde : Des professeurs peuvent avoir des exigences différentes de ce que l'on peut voir dans les vidéos. Soyez attentifs aux directives qu'ils pourraient vous donner concernant la présentation des solutions et le détail des calculs.